1. Aufgabe (Der reiche Bill):

a)

Als Lösungszahlen ergeben sich die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49.

b)

Die Dreieckszahlen heißen 21 und 28.

c)

Mathematisch betrachtet wäre die kleinste Anzahl 1. Mit einem Sack ist er aber wohl nicht reich zu nennen.

Die nächste Zahl ist 36, denn

1+2+3+4+5+6+7+8 = 36 = 6·6.

d)

Gesucht ist nun eine Quadratzahl x^2 zwischen 1000 und 2000, die gleich der Summe ist:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + m = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$$

m hat die Endziffer	S hat die Endziffer	x hat die Endziffer	x^2 hat die Endziffer
0	0 oder 5	0	0
1	1 oder 6	1	1
2	3 oder 8	2	4
3	1 oder 6	3	9
4	0 oder 5	4	6
5	0 oder 5	5	5
6	1 oder 6	6	6
7	3 oder 8	7	9
8	1 oder 6	8	4
9	0 oder 5	9	1

S kann nur die Endziffern 0,1,3,5, 6 oder 8 und

x^2 nur die Endziffern 0, 1, 4, 5, 6 und 9 haben.

Die Endziffern von S und x^2 müssen jedoch übereinstimmen, können demzufolge nur 0, 1, 5 oder 6 sein.

x liegt zwischen 31 und 45, da 31·31=961 und 45·45=2025 x kann wegen der Endzifferregel nur 34, 35, 36, 39, 40 oder 41 sein.

Aus $m \cdot (m+1) = 2x^2$ folgt somit:

$2 \cdot 34^2$: kein Produkt benachbarter Zahlen

$2 \cdot 35^2 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 50$

$2 \cdot 36^2$: kein Produkt benachbarter Zahlen

$2 \cdot 39^2$: kein Produkt benachbarter Zahlen

$2 \cdot 40^2$: kein Produkt benachbarter Zahlen

$2 \cdot 41^2$: kein Produkt benachbarter Zahlen

Billy G. besitzt also $49 \cdot 50 : 2 = 1225$ Goldsäcke.

e)

Hier muss man z.B. mit Hilfe einer Tabellenkalkulation ausprobieren.

Man erhält dann die Zahlen 1.413.721 und 48.024.900, die im Millionenbereich liegen. Die Zahl 41.616 ist zu klein und die Zahl 1.631.432.881 liegt bereits im Milliardenbereich.

f)

Die Lösung des Problems führt auf die Frage, wann eine Quadratzahl gleichzeitig eine Trigonalzahl ist:

$$\frac{m \cdot (m+1)}{2} = n^2$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle:

1) m ist gerade

m/2 und m+1 sind selbst Quadratzahlen mit:
$m / 2 = a^2$ und $m + 1 = b^2$

2) m + 1 ist gerade

(m+1)/2 und m sind selbst Quadratzahlen und es gilt:
$(m+1)/2 = a^2$ und $m = b^2$

Durch Umformen und Eliminieren von m erhält man zwei diophantische Gleichungen:
(1) $b^2 - 2a^2 = 1$ und (2) $b^2 - 2a^2 = -1$

Pell‘sche Gleichungen (nach John Pell 1611 – 1685) oder Fermat‘sche Gleichungen

Ist (a,b) eine Lösung der Gleichungen, so auch (a+b, 2a+b).
$(2a+b)^2 - 2(a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 - 2a^2 - 4ab - 2b^2 = -(b^2 - 2a^2) = \pm 1$

So kann man aus einer Lösung unendlich viele weitere erzeugen:

(1, 1)	= (1, 1)	$1^2 \cdot 1^2$	= 1
(1+1,2+1)	= (2, 3)	$2^2 \cdot 3^2$	= 36
(2+3,4+3)	= (5, 7)	$5^2 \cdot 7^2$	= 1225
(5+7,10+7)	= (12, 17)	$12^2 \cdot 17^2$	= 41616
(12+17, 24+17)	= (29, 41)	$29^2 \cdot 41^2$	= 1413721
(29+41, 58+41)	= (70, 99)	$70^2 \cdot 99^2$	= 48024900
(70+99, 140+99)	= (169, 239)	$169^2 \cdot 239^2$	= 1631432881
(169+239, 338+239)	= (408, 577)	$408^2 \cdot 577^2$	= 55420693056

Der Multimilliardär Billy G. besitzt mindestens 55420693056 Goldmünzen.

2. Aufgabe (50. OTW des Mathe-Treffs):

Die Aufgabe macht nur Sinn unter der Voraussetzung (0): „verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern; gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern."

(1) MRREOTT : MAF = ILTRG

(2) MAF

(3) GEO

(4) FFI

(5) IFFT

(6) IAEM

(7) MTIT

(8) MTIT

(9) L

(10) ergibt sich aus (7, 8, 9): L = 0.

(11) aus (1, 2): I = 1.

(12) aus (4): $\boldsymbol{T \cdot F}$ endet auf 1; $\mathbf{9 \cdot 9}$ und $\mathbf{1 \cdot 1}$ entfallen wegen (0); bleiben also $\mathbf{7 \cdot 3}$ und $\mathbf{3 \cdot 7}$.

(13) aus (2, 4, 11): F > M > 1.

(14) aus (6, 8, 11): $\boldsymbol{I < M \Rightarrow R < G}$.

(15) aus (1, 2, 3, 11): R=A+1; R > 2.

(16) aus (1, 2, 3): $\boldsymbol{G + F = 10 + R \Rightarrow G - R = 10 - F}$.

(17) aus (12, 15): $\boldsymbol{G - R = 3 \ \ oder \ \ G - R = 7}$.

(18) aus (15, 16, 17): G=9 und R=2 ist nicht möglich; folglich gilt F=7 und T=3.

(19) aus (4, 6, 8, 14, 18): 3=T<R<G

(20) aus (0, 10, 11, 15, 17, 18, 19): Für das Kontrollprodukt $\boldsymbol{MA7 \cdot 103RG}$ dieser Aufgabe sind denkbar mit dem Ergebnis MRREOTT

a) $\mathbf{247 \cdot 10358}$ = 2558426; keine Lösung wegen z.B. fehlender Eindeutigkeit für T (2=T=6);

b) $\mathbf{647 \cdot 10358}$ = 671586; keine Lösung wegen zu (0) z.B. Widerspruch zu R=3=T.

c) $\mathbf{947 \cdot 10358}$ = 9819443; keine Lösung wegen zu (0) z.B. Widerspruch durch M=E=9;

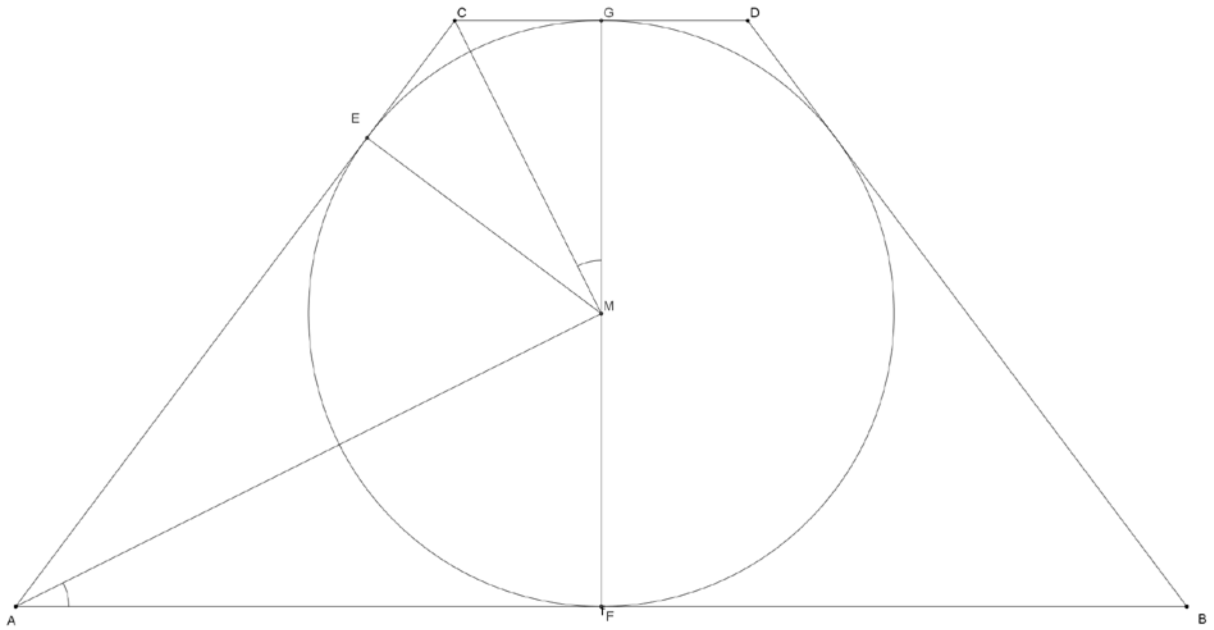
d) $\mathbf{257 \cdot 10369}$ = 2664833; kein Widerspruch M=2, A=5, R=6, T=9, O=8;

e) $\mathbf{457 \cdot 10369}$ = 4738633; Widerspruch zu (0) z.B. durch 3=R=7;

f) $\mathbf{857 \cdot 10369}$ = 8886233; Widerspruch zu (0) z.B. durch M=8=R.

2664833:257=10369 lautet die Divisionsaufgabe; mit A=5, E=4, F=7, G=9, I=1, L=0, M=2, O=8, R=6 und T=3 lautet die Botschaft „12345212246213467809!"
IMTEAMIMMERMITERFOLG! („Im Team immer mit Erfolg!")

Aufgabe 3 (Die etwas andere Hochzeitstorte):



In einem gleichschenkligen Trapez liegt der Inkreismittelpunkt M auf der Symmetrieachse des Trapezes. Die Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten CD und AB.

Zudem liegt M auf der Winkelhalbierenden der Winkel ECG und FAE.

Da die Winkel ECG und FAE zusammen 180° ergeben, sind die beiden Winkel MCG und FAM zusammen 90° groß. (1)

Da die Dreiecke MCG und FAM rechtwinklig sind, ist
die Summe des Betrags des Winkels MCG und des Betrag des Winkels GMC 90° groß. (2)

Aus der Bedingung (1) und (2) folgt, dass der Betrag des Winkels FAM genauso groß ist wie der Betrag des Winkels GMC.

Daraus folgt, dass die Dreiecke MCG und FAM ähnlich sind.

Wegen $|CG| = 1dm$, $|AF| = 4dm$ und $|MG| = |MF| = r$ folgt daraus
$|CG| : |MG| = |MF| : |AF|$,
d.h. 1dm : r = r : 4dm.
Damit ergibt sich $r^2 = 4dm^2$.
Da r >0 gilt, ist r=2dm.
Der Inkreisradius hat eine Länge von 2dm.

Aufgabe 4 (Summ, Summ, Summe?)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Eine mögliche Lösung ist, dass man an der gestrichelten Linie die Grafik zerschneidet und verschiebt.

Weitere kreative Lösungen sind möglich und durchaus gewünscht.